Chapitre V : Intervalles de confiance

MATH-F-207

Davy Paindaveine

Bloc 2, Bachelier en sciences mathématiques
Université libre de Bruxelles

2024–2025

Contenu du chapitre

Contenu du chapitre

Introduction

Soit le modèle statistique paramétrique à paramètre scalaire

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^{(n)} = \left\{\mathrm{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\right\}\right),$$

où les mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ représentent les distributions possibles de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$.

L'estimation ponctuelle de θ fournit une valeur unique, $T(X^{(n)})(\in \Theta)$, de θ.

On cherche maintenant à donner une collection $S(X^{(n)})(\subset \Theta)$ de valeurs de θ contenant la vraie valeur de θ avec une certaine probabilité cible.

Définition

Ce sous-ensemble $S(X^{(n)})$ est une zone de confiance.
S'il s'agit d'un intervalle, on parle d'intervalle de confiance (IC).

La probabilité cible est le niveau de confiance.

Définition 1

Soit un modèle statistique paramétrique à paramètre scalaire. Soit $\alpha \in]0,1[$. *Alors* $[L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]$ *est un IC pour* θ *au niveau de confiance* $1-\alpha$ *si et seulement si les statistiques* $L(X^{(n)})$ *et* $U(X^{(n)})$ *vérifient les deux conditions suivantes pour tout* $\theta \in \Theta$*:*
(i) $L(X^{(n)}) \leq U(X^{(n)})$ $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$*-p.s.*
(ii) $\mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta \in [L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]\right] \geq 1-\alpha.$

Attention

On ne dira pas

"$[L(x^{(n)}), U(x^{(n)})]$ *contient la vraie valeur de* θ *avec probabilité* $\geq 1-\alpha$"

On dira plutôt

"$[L(x^{(n)}), U(x^{(n)})]$ *est la réalisation d'un intervalle aléatoire contenant la vraie valeur de* θ *avec probabilité* $\geq 1-\alpha$"

Contenu du chapitre

Exemple du verre de bière (avec variance connue)

Soit $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, où les X_i sont i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, avec σ_0^2 un réel strictement positif fixé. Sous $\mathrm{P}_\mu^{(n)}$, la variable aléatoire

$$g(X^{(n)}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma_0}$$

est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_\mu^{(n)}\left[\underbrace{\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{=-z_{\alpha/2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma_0} \leq \underbrace{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}_{=z_{\alpha/2}}\right] = 1 - \alpha,$$

ce qui se réécrit

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_\mu^{(n)}\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha.$$

Intervalle de confiance gaussien

Par conséquent,

$$\left[L(X^{(n)}), U(X^{(n)})\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

est un IC pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$.

La longueur de l'IC

$$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

est une fonction décroissante de n, mais croissante de σ_0 et de $1-\alpha$.

Intervalles asymétriques

Pour tout $u \in]0, \alpha[$ fixé, on a aussi

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_\mu^{(n)}\left[\Phi^{-1}(\alpha - u) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma_0} \leq \Phi^{-1}(1-u)\right] = 1 - \alpha,$$

ce qui mène à l'IC

$$\begin{aligned}\left[L_u(X^{(n)}), U_u(X^{(n)})\right] &\stackrel{\text{def}}{=} \left[\bar{X} - \Phi^{-1}(1-u)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \Phi^{-1}(\alpha - u)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[\bar{X} - z_u \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha-u}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right].\end{aligned}$$

L'IC d'abord considéré, celui associé à $u = \alpha/2$, est celui de longueur minimale (en $u \in]0, \alpha[$). Il respecte aussi les propriétés de symétrie du problème.

Fonction pivotale

C'est le fait qu'on dispose d'une fonction pivotale qui a rendu possible la construction de l'IC.

Définition 2

Désignons par $\mathcal{X}^{(n)}$ l'ensemble des valeurs possibles de $x^{(n)}$. Alors la fonction $g : \mathcal{X}^{(n)} \times \Theta \to \mathbb{R}$ est pivotale pour θ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites:
(i) $x^{(n)} \mapsto g(x^{(n)}, \theta)$ *est mesurable pour tout* $\theta \in \Theta$*;*
(ii) $\theta \mapsto g(x^{(n)}, \theta)$ *est strictement monotone pour tout* $x^{(n)} \in \mathcal{X}^{(n)}$*;*
(iii) la distribution de $g(X^{(n)}, \theta)$ *sous* $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ *ne dépend pas de* θ*.*

Méthode des fonctions pivotales

Si g est pivotale, alors il existe des réels a, b indépendants de θ tels que

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[a \leq g(X^{(n)}, \theta) \leq b\right] \geq 1 - \alpha.$$

Puisque $\theta \mapsto g(X^{(n)}, \theta)$ est strictement monotone, elle est inversible, ce qui permet d'écrire le résultat ci-dessus sous la forme

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta \in g^{-1}(X^{(n)}, \cdot)([a, b])\right] \geq 1 - \alpha,$$

où $g^{-1}(x^{(n)}, \cdot)([a, b])$ est l'image de $[a, b]$ par la réciproque de $\theta \mapsto g(x^{(n)}, \theta)$.

Comme on peut montrer que cette réciproque est continue, $g^{-1}(X^{(n)}, \cdot)([a, b])$ est un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Remarques

- On essayera, si possible, d'avoir "$= 1 - \alpha$" (plutôt que "$\geq 1 - \alpha$").
- a et b ne sont pas uniques (// l'exemple du verre de bière)
- Souvent, a et b peuvent être fixés en identifiant l'IC de longueur minimale.

Exemple du bus

Soit $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, où les X_i sont i.i.d. $\mathrm{Unif}([0, \theta])$, avec $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_0^+$.

La fonction

$$g(x^{(n)}, \theta) = \frac{x_{(n)}}{\theta}$$

est pivotale pour θ.

Les IC pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ qui en résultent prennent la forme

$$[L_u(X^{(n)}), U_u(X^{(n)})] = \left[\frac{X_{(n)}}{(1-u)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{(\alpha - u)^{1/n}} \right],$$

où $u \in [0, \alpha]$ est arbiraire (pour $u = \alpha$, l'IC est $[X_{(n)}/(1-\alpha)^{1/n}, +\infty[$).

Exercice : montrer que $[X_{(n)}, X_{(n)}/\alpha^{1/n}]$ est l'IC de longueur minimale.

Paramètres de nuisance

Soit le modèle statistique paramétrique

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^{(n)} = \left\{ \mathrm{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta \ \subset \mathbb{R}^k \right\}\right),$$

où les mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ représentent les distributions possibles de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$.

On souhaite construire un IC au niveau $1 - \alpha$ pour l'une des composantes θ_ℓ de $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Sans perte de généralité, on va se restreindre à $\ell = 1$.

Intervalle de confiance pour une composante

Définition 3

Soit le modèle statistique paramétrique ci-dessus. Soit $\alpha \in]0,1[$.
Alors $[L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]$ *est un IC pour* θ_1 *au niveau de confiance* $1-\alpha$ *si et seulement si les statistiques* $L(X^{(n)})$ *et* $U(X^{(n)})$ *vérifient les deux conditions suivantes pour tout* $\theta \in \Theta$*:*

(i) $L(X^{(n)}) \leq U(X^{(n)})$ $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$*-p.s.*

(ii) $\mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta_1 \in [L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]\right] \geq 1-\alpha$.

Fonction pivotale pour une composante

Définition 4

Dans le cadre du modèle paramétrique ci-dessus, notons Θ_1 l'ensemble des valeurs que peut prendre le paramètre θ_1 lorsque θ parcourt Θ. Alors la fonction $g : \mathbb{R}^n \times \Theta_1 \to \mathbb{R}$ est pivotale pour θ_1 si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites:
(i) $x^{(n)} \mapsto g(x^{(n)}, \theta_1)$ *est mesurable pour tout* $\theta_1 \in \Theta_1$*;*
(ii) $\theta_1 \mapsto g(x^{(n)}, \theta_1)$ *est strictement monotone pour tout* $x^{(n)} \in \mathcal{X}^{(n)}$*;*
(iii) la distribution de $g(X^{(n)}, \theta_1)$ *sous* $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ *ne dépend pas de* θ*.*

Exemple du verre de bière (avec variance inconnue)

Soit $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, où les X_i sont i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ (exemple du verre de bière).

Alors, en écrivant $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

$$g(x^{(n)}, \mu) = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{x} - \mu)}{s}$$

est pivotale pour μ (si $n \geq 2$), et $g(X^{(n)}, \mu) \sim t_{n-1}$.

L'IC (symétrique) pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$ qui en résulte est

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \bar{X} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right].$$

Fonction pivotale pour σ^2

Dans le même modèle, la fonction

$$g(x^{(n)}, \sigma^2) = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

est pivotale pour σ^2 (si $n \geq 2$), et $g(X^{(n)}, \sigma^2) \sim \chi^2_{n-1}$.

Un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de confiance $1 - \alpha$ est donc

$$\left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \right].$$

On vérifiera encore que la longueur de l'IC est une fonction croissante de $1 - \alpha$ et décroissante de n.

Contenu du chapitre

Introduction

Intervalles exacts

Intervalles asymptotiques

Lien avec les tests d'hypothèses

Zones de confiance

Introduction

Soit le modèle statistique paramétrique

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^{(n)} = \left\{\mathrm{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\right\}\right),$$

où les mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ représentent les distributions possibles de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$.

En pratique, trouver des fonctions pivotales est difficile! De nombreux résultats asymptotiques permettent cependant de construire des IC asymptotiques.

Intervalles asymptotiques

Définition 5

Soit le modèle statistique paramétrique ci-dessus. Soit $\alpha \in]0,1[$. *Alors* $[L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]$ *est un IC asymptotique pour* θ_1 *au niveau de confiance* $1-\alpha$ *si et seulement si les statistiques* $L(X^{(n)})$ *et* $U(X^{(n)})$ *vérifient les deux conditions suivantes pour tout* $\theta \in \Theta$*:*

(i) pour tout n*,* $L(X^{(n)}) \leq U(X^{(n)})$ $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$*-p.s.*

(ii) $\mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta_1 \in [L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]\right] \to 1-\alpha$ *quand* $n \to \infty$.

Une exemple paramétrique général

Supposons qu'on dispose d'un estimateur $T(X^{(n)}) = (T_1(X^{(n)}), \ldots, T_k(X^{(n)}))$ de $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ faiblement convergent et tel que, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\sqrt{n}(T_1(X^{(n)}) - \theta_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)) \qquad \text{sous } \mathrm{P}_\theta^{(n)}$$

quand $n \to \infty$, où $\sigma^2(\cdot)$ est une fonction continue. Alors la fonction

$$g(x^{(n)}, \theta_1) = \frac{\sqrt{n}(T_1(x^{(n)}) - \theta_1)}{\sigma(T(x^{(n)}))}$$

est "asymptotiquement pivotale", et $g(X^{(n)}, \theta_1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$ quand $n \to \infty$.

L'IC asymptotique pour θ_1 au niveau asymptotique $1 - \alpha$ qui en résulte est

$$\left[T_1(X^{(n)}) - z_{\alpha/2} \frac{\sigma(T(X^{(n)}))}{\sqrt{n}}, T_1(X^{(n)}) + z_{\alpha/2} \frac{\sigma(T(X^{(n)}))}{\sqrt{n}} \right].$$

Un exemple "semi-paramétrique"

Soit un modèle statistique d'échantillonnage pour lequel l'observation $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ regroupe des variables aléatoires dont la loi commune admet des moments finis d'ordre 2. Soient $\mu = \mathrm{E}_F[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}_F[X_1]$.

Alors la fonction

$$g(x^{(n)}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}^{(n)} - \mu)}{s}$$

est asymptotiquement pivotale, et $g(X^{(n)}, \mu) \stackrel{\mathcal{D}}{\to} \mathcal{N}(0, 1)$ quand $n \to \infty$.

L'IC asymptotique pour μ au niveau asymptotique $1 - \alpha$ qui en résulte est

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Contenu du chapitre

Construction d'un test

Soit un modèle statistique paramétrique à paramètre scalaire

$$\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^{(n)} = \Big\{\mathrm{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\Big\}\Big),$$

où les mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ représentent les distributions possibles pour $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Soit $[L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]$ un IC pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Pour le problème de test

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0, \end{cases}$$

on peut alors considèrer le test défini par

$$\phi(x^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_0 \notin [L(x^{(n)}), U(x^{(n)})] \\ 0 & \text{si } \theta_0 \in [L(x^{(n)}), U(x^{(n)})]. \end{cases}$$

Construction d'un test

Le risque de première espèce de ϕ satisfait

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\theta_0}^{(n)}[\phi] &= \mathrm{P}_{\theta_0}^{(n)}\big[\theta_0 \notin [L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]\big] \\ &= 1 - \mathrm{P}_{\theta_0}^{(n)}\big[\theta_0 \in [L(X^{(n)}), U(X^{(n)})]\big] \leq 1 - (1-\alpha) = \alpha,\end{aligned}$$

de sorte que ϕ est de niveau α.

Il est donc possible, à l'aide d'un IC, de construire un test valide pour le problème de test bilatéral.

Construction d'un IC

Soit ϕ_{θ_0} un test (pur) de niveau α pour le problème de test bilatéral

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Posons

$$A(x^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\theta_0 \in \Theta : \phi_{\theta_0}(x^{(n)}) = 0\right\}.$$

Puisque

$$\mathrm{P}_\theta^{(n)}[\theta \in A(X^{(n)})] = \mathrm{P}_\theta^{(n)}[\phi_\theta(X^{(n)}) = 0] = 1 - \mathrm{P}_\theta^{(n)}[\phi_\theta(X^{(n)}) = 1] \geq 1 - \alpha,$$

l'ensemble aléatoire $A(X^{(n)})$ est une zone de confiance pour θ au niveau $1 - \alpha$.

Il n'y a pas de garantie qu'il s'agisse d'un IC.

Remarques

- Ceci permet une construction systématique d'IC
  (via les tests de rapport de vraisemblance).
- Les IC ainsi construits héritent de propriétés d'optimalité des tests associés.

Contenu du chapitre

Zones de confiance

Soit le modèle statistique paramétrique

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^{(n)} = \left\{ \mathrm{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta \ \subset \mathbb{R}^k \right\}\right),$$

où les mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta^{(n)}$ représentent les distributions possibles de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$.

On souhaite construire une zone de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour θ.

Définition 6

Soit un modèle statistique paramétrique et soit $\alpha \in]0, 1[$. Alors la statistique $R^{(n)}(X^{(n)})$, à valeurs dans l'ensemble des parties de Θ, est une zone de confiance pour θ au niveau de confiance $1-\alpha$ si et seulement si pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta \in R(X^{(n)})\right] \geq 1 - \alpha$.

Remarques

- Ces zones ne doivent pas nécessairement être connexes.
  En ce sens, la définition est plus générale que celle des IC.
- Comme ci-dessus, on peut construire ces zones de façon systématique.
  Mais les zones obtenues ne seront que rarement des hyper-rectangles.
- Que faire si l'on désire des hyper-rectangles?

Hyper-rectangles

Supposons que, pour chaque $\ell = 1, \ldots, k$, $[L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})]$ soit un IC au niveau $1-\alpha$ fixé pour la ℓème composante θ_ℓ du paramètre $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Il est naturel de considérer la zone de confiance hyper-rectangulaire

$$\begin{aligned} R(X^{(n)}) &= [L_1(X^{(n)}), U_1(X^{(n)})] \times \ldots \times [L_k(X^{(n)}), U_k(X^{(n)})] \\ &= \Big\{\theta \in \Theta : \theta_\ell \in [L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})] \ \forall \ell = 1, \ldots, k\Big\}. \end{aligned}$$

Mais il est crucial de remarquer que, typiquement,

$$\mathrm{P}_\theta^{(n)}[\theta \in R(X^{(n)})] < \mathrm{P}_\theta^{(n)}[\theta_\ell \in [L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})]]$$

pour tout ℓ, de sorte que le niveau de confiance associé à $R(X^{(n)})$ n'est pas clair.

Hyper-rectangles

Une solution possible est de considérer des IC $[L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})]$ a un niveau de confiance de $1 - \frac{\alpha}{k}$. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_\theta^{(n)}[\theta \notin R(X^{(n)})] &= \mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\bigcup_{\ell=1}^{k}\left[\theta_\ell \notin \left[L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})\right]\right]\right] \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{k} \underbrace{\mathrm{P}_\theta^{(n)}\left[\theta_\ell \notin [L_\ell(X^{(n)}), U_\ell(X^{(n)})]\right]}_{\leq \alpha/k} \\
&\leq \alpha,
\end{aligned}$$

ce qui livre $\mathrm{P}_\theta^{(n)}[\theta \in R(X^{(n)})] \geq 1 - \alpha$: l'hyper-rectangle $R(X^{(n)})$ est une zone de confiance au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu

- ce que sont des intervalles/zones/régions de confiance
- comment construire des intervalles à l'aide de fonctions pivotales, en présence ou non de paramètres de nuisance
- comment définir et construire des intervalles asymptotiques
- Le lien entre IC et tests d'hypothèses