

Section 6 :

Tests d'hypothèses linéaires (bis)

STAT-F-406

Master en sciences mathématiques, Master en statistique

Davy Paindaveine

Université libre de Bruxelles

2024–2025

Contenu du chapitre

Rappels et préliminaires

Test de Wald

Test de rapport de vraisemblance

Test des multiplicateurs de Lagrange

Relation entre les trois tests

Tests d'hypothèses linéaires sur β

Dans le modèle semi-fort homoscédastique, reconsidérons le problème de test (au niveau $\alpha \in]0, 1[$)

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : R\beta = r \\ \mathcal{H}_1 : R\beta \neq r, \end{cases}$$

où la matrice R de rang maximal p et le p -vecteur r sont fixés.

On a vu que, sous \mathcal{H}_0 ,

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{\hat{\sigma}^2} (R\hat{\beta} - r)' (RQ^{-1}R')^{-1} (R\hat{\beta} - r) \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_p^2$$

(on écrira W plutôt que W_{asympt} ici). Le test associé rejette donc \mathcal{H}_0 au niveau asymptotique α si et seulement si $W > \chi_{p,1-\alpha}^2$.

Estimateur des moindres carrés contraint

Considérons l'espace paramétrique

$$\Theta = \{(\beta, \sigma^2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_0^+\}$$

et son équivalent contraint

$$\Theta_0 = \{(\beta, \sigma^2) \in \Theta : R\beta = r\},$$

qui sont de dimension $k + 1$ et $k + 1 - p$, respectivement.

L'estimateur des **moindres carrés contraint**

$$\tilde{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{\beta: R\beta=r} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i)^2$$

va jouer un rôle important dans cette section.

Estimateur des moindres carrés contraint

On peut obtenir une expression explicite de $\tilde{\beta}$, en déterminant les points critiques de la Lagrangienne

$$L(\beta, \lambda) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i)^2 + \lambda'(R\beta - r),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Puisque

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta} L(\beta, \lambda) &= -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i) X_i + R' \lambda \\ &= -2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + 2 \sum_{i=1}^n X_i X_i' \beta + R' \lambda \\ &= -2n \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right) - Q\beta - \frac{1}{2n} R' \lambda \right) \\ &= -2nQ \left(\hat{\beta} - \beta - \frac{1}{2n} Q^{-1} R' \lambda \right),\end{aligned}$$

Estimateur des moindres carrés contraint

on doit avoir

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \frac{1}{2n} Q^{-1} R' \lambda.$$

En imposant la condition $0 = \nabla_{\lambda} L(\beta, \lambda) = R\beta - r$, on obtient

$$R\tilde{\beta} = R\hat{\beta} - \frac{1}{2n} RQ^{-1} R' \lambda = r,$$

donc

$$\frac{1}{2n} \lambda = (RQ^{-1} R')^{-1} (R\hat{\beta} - r).$$

Ceci livre donc l'unique solution

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - Q^{-1} R' (RQ^{-1} R')^{-1} (R\hat{\beta} - r),$$

qui doit être l'unique minimum global (pourquoi?)

Estimateur des moindres carrés contraint

De même qu'à l'estimateur $\hat{\beta}$ est associé l'estimateur de la variance

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}' X_i)^2,$$

à l'estimateur contraint $\tilde{\beta}$ est associé l'estimateur contraint de la variance

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i)^2.$$

Notons que $\tilde{\sigma}^2 \geq \hat{\sigma}^2$ p.s.

Sur le test de Wald

Une autre manière de montrer que $\tilde{\sigma}^2 \geq \hat{\sigma}^2$ est d'écrire

$$\begin{aligned}n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2) &= \sum_{i=1}^n \{(Y_i - \tilde{\beta}' X_i)^2 - (Y_i - \hat{\beta}' X_i)^2\} \\&= \sum_{i=1}^n (\hat{\beta} - \tilde{\beta})' X_i (2Y_i - (\tilde{\beta} + \hat{\beta})' X_i) \\&= (\hat{\beta} - \tilde{\beta})' \sum_{i=1}^n X_i (2Y_i - X_i' (\tilde{\beta} + \hat{\beta})) \\&= n(\hat{\beta} - \tilde{\beta})' (2Q\hat{\beta} - Q(\tilde{\beta} + \hat{\beta})) \\&= n(\hat{\beta} - \tilde{\beta})' Q(\hat{\beta} - \tilde{\beta})\end{aligned}$$

(pourquoi?) Ceci montre aussi que **les valeurs minimales contraintes et non contraintes sont proches** ssi **les minimas correspondants le sont**.

Sur le test de Wald

Puisque $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - Q^{-1}R'(RQ^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r)$, on a de plus

$$\begin{aligned} & n(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'Q(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) \\ &= n\{Q^{-1}R'(RQ^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r)\}'Q\{Q^{-1}R'(RQ^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r)\} \\ &= n(R\hat{\beta} - r)'(RQ^{-1}R')^{-1}RQ^{-1}QQ^{-1}R'(RQ^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r) \\ &= n(R\hat{\beta} - r)'(RQ^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r) = \hat{\sigma}^2W, \end{aligned}$$

de sorte que

$$W = \frac{n}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'Q(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) = \frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2},$$

ce qui donne deux nouvelles interprétations à la statistique de Wald W .

Test du rapport de vraisemblance gaussien

Plaçons-nous dans le cadre du modèle fort avec normalité.

Le test du rapport de vraisemblance pour

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta \in \Theta_0 = \{(\beta, \sigma^2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_0^+ : R\beta = r\} \\ \mathcal{H}_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0 = \{(\beta, \sigma^2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_0^+ : R\beta \neq r\} \end{cases}$$

rejette \mathcal{H}_0 au niveau asymptotique α si et seulement si

$$-2 \ln \Lambda = -2 \ln \frac{L_{\tilde{\theta}}^{(n)}}{L_{\hat{\theta}}^{(n)}} > \chi_{s, 1-\alpha}^2,$$

où $s = (k+1) - (k+1-p) = p$ et où $\tilde{\theta}$ et $\hat{\theta}$ sont respectivement les MLEs gaussiens contraints et non contraints de θ .

Test du rapport de vraisemblance gaussien

Rappelons que la vraisemblance gaussienne est donnée par

$$L_{\theta} = L_{\beta, \sigma^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i)^2 \right) \left(\prod_{i=1}^n f^{X_i}(X_i) \right).$$

On vérifiera aisément (comment?) que $\tilde{\theta} = (\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}^2)$ et $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$, où $\tilde{\beta}$, $\tilde{\sigma}^2$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont les estimateurs considérés aux pages précédentes.

On a donc

$$\begin{aligned} -2 \ln \Lambda &= -2 \ln \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i)^2 \right) \left(\prod_{i=1}^n f^{X_i}(X_i) \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}' X_i)^2 \right) \left(\prod_{i=1}^n f^{X_i}(X_i) \right)} \\ &= -2 \ln \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{n}{2} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{n}{2} \right)} = -2 \ln \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-n/2} = n \ln \frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}. \end{aligned}$$

Test du rapport de vraisemblance gaussien

Le test du rapport de vraisemblance gaussien rejette donc \mathcal{H}_0 au niveau asymptotique α si et seulement si

$$-2 \ln \Lambda = n \ln \frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} > \chi_{p,1-\alpha}^2.$$

Par le théorème de Wilks, ce test est asymptotiquement de niveau α dans le modèle fort avec normalité.

Qu'en est-il dans le modèle semi-fort homoscedastique?

Test des multiplicateurs de Lagrange

Pour un problème de test générique du type

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0, \end{cases}$$

le test des multiplicateurs de Lagrange rejette \mathcal{H}_0 pour de grandes valeurs de la statistique

$$\|(\nabla_{\theta} \ln L_{\theta})|_{\theta=\tilde{\theta}}\|_{\Sigma}^2,$$

où $\tilde{\theta}$ est le MLE contraint de θ et où $\|z\|_{\Sigma}^2 = z'\Sigma^{-1}z$ est fondée sur une matrice de variance-covariance Σ livrant une loi asymptotique standard.

Test des multiplicateurs de Lagrange gaussien

Plaçons-nous de nouveau dans le cadre du modèle fort avec normalité.

Puisque

$$L_{\theta} = L_{\beta, \sigma^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i)^2 \right) \left(\prod_{i=1}^n f^{X_i}(X_i) \right),$$

on a alors

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \ln L_{\theta} &= \nabla_{\beta} \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i) X_i. \end{aligned}$$

Ici, la statistique que nous utiliserons est alors de la forme

$$\|(\nabla_{\beta} \ln L_{\theta})|_{\theta=\tilde{\theta}}\|_{\Sigma}^2$$

plutôt que $\|(\nabla_{\theta} \ln L_{\theta})|_{\theta=\tilde{\theta}}\|_{\Sigma}^2$ (pourquoi ne pas inclure $(\nabla_{\sigma^2} \ln L_{\theta})|_{\theta=\tilde{\theta}}$?)

Quelle matrice Σ utiliser?

Dans le modèle fort avec normalité,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \nabla_{\beta} \ln L_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta' X_i) X_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_k(0, V),$$

où

$$V = \text{Var}\left[\frac{1}{\sigma^2} \varepsilon X\right] = \frac{1}{\sigma^4} \text{E}[\varepsilon^2 X X'] = \frac{1}{\sigma^4} \text{E}[\text{E}[\varepsilon^2 | X] X X'] = \frac{1}{\sigma^2} \text{E}[X X'].$$

Ceci suggère de considérer

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \nabla_{\beta} \ln L_{\theta}\right)' \left(\frac{1}{\sigma^2} \text{E}[X X']\right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \nabla_{\beta} \ln L_{\theta}\right) = \|\nabla_{\beta} \ln L_{\theta}\|_{\Sigma=nV}^2,$$

qui suit asymptotiquement une loi standard (la loi χ_k^2).

Test des multiplicateurs de Lagrange gaussien

La statistique de test naturelle qui en résulte est donc

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\nabla_{\beta} \ln L_{\theta}) \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} \right)' \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} Q \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\nabla_{\beta} \ln L_{\theta}) \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n\tilde{\sigma}^2}} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i) X_i \right)' \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} Q \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n\tilde{\sigma}^2}} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i) X_i \right) \\ &= \frac{n}{\tilde{\sigma}^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i) X_i \right)' Q^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}' X_i) X_i \right) \\ &= \frac{n}{\tilde{\sigma}^2} (Q\hat{\beta} - Q\tilde{\beta})' Q^{-1} (Q\hat{\beta} - Q\tilde{\beta}) = \frac{n}{\tilde{\sigma}^2} (\hat{\beta} - \tilde{\beta})' Q (\hat{\beta} - \tilde{\beta}) = \frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\tilde{\sigma}^2}. \end{aligned}$$

Par le lemme de Slutsky, on a que, sous \mathcal{H}_0 ,

$$\frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\tilde{\sigma}^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2} \times \frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_p^2,$$

et ce même dans le modèle semi-fort homoscédastique! Le test qui en résulte rejette donc \mathcal{H}_0 au niveau asymptotique α ssi $\frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\tilde{\sigma}^2} > \chi_{p,1-\alpha}^2$.

Relation entre les trois tests

Les trois tests rejettent \mathcal{H}_0 au niveau asymptotique α lorsque

$$LM = \frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2} = n\left(1 - \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-1}\right) > \chi_{p,1-\alpha}^2,$$

$$LR = n \ln \frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} > \chi_{p,1-\alpha}^2,$$

$$W = \frac{n(\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2} = n\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} - 1\right) > \chi_{p,1-\alpha}^2.$$

Puisque $1 - x^{-1} \leq \ln x \leq x - 1$ pour tout $x \geq 1$, on a

$$LM \leq LR \leq W \quad \text{p.s.}$$

Par conséquent, le test LR est également valide dans le modèle semi-fort homoscédastique!

Les courbes de puissances sont aussi dans l'ordre ci-dessus.